

Für mathematische Objekte a lassen sich mittels **Normen** $\|a\|$ Bewertungsmaßzahlen definieren, für welche die sogenannten *Norm-Axiome* gelten:

1. Positive Definitheit: $\|a\| \geq 0$ wobei $a = 0 \Leftrightarrow \|a\| = 0$
2. Absolute Homogenität: $\|c \cdot a\| = |c| \cdot \|a\|$ mit $c \in \mathbb{R}$
3. Dreiecksungleichung: $\|a_1 + a_2\| \leq \|a_1\| + \|a_2\|$

Für **konstante Vektoren** $\underline{a} \in \mathbb{C}^n$ lässt sich die sogenannte **p-Norm** definieren:

$$\|\underline{a}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p}.$$

Hierbei ist

$$|a_i| = \sqrt{\operatorname{Re}\{a_i\}^2 + \operatorname{Im}\{a_i\}^2}.$$

Für unterschiedliche p ergeben sich folgende wichtige Normen:

$$p = 1: \quad \|\underline{a}\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i| \quad \text{(Betrags)-Summennorm}$$

$$p = 2: \quad \|\underline{a}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} \quad \text{Euklidische Norm}$$

$$p \rightarrow \infty: \quad \|\underline{a}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |a_i| \quad \text{Maximumsnorm}$$

Für **zeitabhängige Vektoren** $\underline{a}(t)$ lässt sich in gleicher Weise eine p-Norm definieren:

$$\|\underline{a}(t)\|_p = \left(\int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n |a_i(t)|^p dt \right)^{1/p} .$$

Voraussetzung für die Berechnung der Norm ist die Konvergenz des Integrals.

Beispiel: Für den Fall $\underline{a}(t) \in \mathbb{R}^n$ ergibt sich die 2-Norm

$$\|\underline{a}(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} \underline{a}^T(t) \underline{a}(t) dt} .$$

Für die Berechnung muss der Vektor $\underline{a}(t)$ dann quadratisch integrierbar sein.

Zur Definition der Singulärwertzerlegung werden zwei Matrixdefinitionen benötigt:

- **Unitäre Matrix**

Eine quadratische Matrix $\underline{X} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt **unitäre Matrix**, falls gilt:

$$\underline{X} \underline{X}^* = \underline{X}^* \underline{X} = \underline{I}.$$

Hierbei ist \underline{X}^* die *adjungierte Matrix* von \underline{X} , d.h. diejenige Matrix, die durch Transponierung und Konjugation der Matrix \underline{X} entsteht.

Ist $\underline{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so nennt man \underline{X} eine **orthogonale Matrix** und es gilt

$$\underline{X} \underline{X}^T = \underline{X}^T \underline{X} = \underline{I}.$$

Offenbar stimmen bei unitären Matrizen Inverse und transponierte Matrix überein, d.h. $\underline{X}^* = \underline{X}^{-1}$ bzw. $\underline{X}^T = \underline{X}^{-1}$.

- **Hermiteische Matrix**

Eine quadratische Matrix $\underline{X} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt **hermitesche Matrix**, falls gilt:

$$\underline{X} = \underline{X}^*.$$

Ist $\underline{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so nennt man \underline{X} eine **symmetrische Matrix** und es gilt

$$\underline{X} = \underline{X}^T.$$

Hermiteische Matrizen besitzen ausschließlich reelle Eigenwerte λ_i ($i = 1, \dots, n$) und die zugehörigen n linear unabhängigen Eigenvektoren \underline{v}_i ($i = 1, \dots, n$) sind orthogonal zueinander, d.h.

$$\underline{v}_i^T \underline{v}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgrund der Definitionsgleichung folgt für eine hermitesche Matrix, dass ihre Links- und Rechtseigenvektoren übereinstimmen ($\underline{v}_i = \underline{w}_i, \forall i$). Somit ist die Matrix $\underline{V} = [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$ dann orthogonal, denn es gilt

$$\underline{V} \underline{V}^T = \underline{V}^T \underline{V} = \underline{I}.$$

Für jede Matrix $\underline{M} \in \mathbb{C}^{q \times p}$ mit $\text{rg}\{\underline{M}\} = r$ ist dann eine sogenannte **Singulärwertzerlegung** (SWZ) möglich gemäß

$$\underline{M} = \underline{U} \underline{\Sigma} \underline{V}^*.$$

Hierbei sind $\underline{U} \in \mathbb{C}^{q \times q}$ und $\underline{V} \in \mathbb{C}^{p \times p}$ *unitäre Matrizen* mit

$$\underline{U} = [\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_q]$$

$$\underline{V} = [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p]$$

und $\underline{\Sigma} \in \mathbb{C}^{q \times p}$ mit

$$\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \underline{\Sigma}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \text{ mit } \underline{\Sigma}_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \sigma_r \end{bmatrix}.$$

Die Elemente σ_i ($i = 1, \dots, r$) sind die **Singulärwerte** der Matrix \underline{M} mit

$$\bar{\sigma}(\underline{M}) := \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r =: \underline{\sigma}(\underline{M}) > 0.$$

Man bezeichnet dann die Vektoren \underline{v}_i ($i = 1, \dots, p$) und \underline{u}_i ($i = 1, \dots, q$) auch als **Rechts- bzw. Links-Singulärvektoren**.

Offenbar sind wegen

$$\begin{aligned} \underline{M}^* \underline{M} &= (\underline{U} \underline{\Sigma} \underline{V}^*)^* (\underline{U} \underline{\Sigma} \underline{V}^*) = \underline{V} \underline{\Sigma}^T \underline{U}^* (\underline{U} \underline{\Sigma} \underline{V}^*) = \underline{V} \underline{\Sigma}^T \underline{U}^* (\underline{U} \underline{\Sigma} \underline{V}^*) = \underline{V} \underline{\Sigma}^T \underline{\Sigma} \underline{V}^* \\ \underline{M}^* \underline{M} &= \underline{V} \begin{bmatrix} \underline{\Sigma}_r^2 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{V}^* \text{ bzw. } \underline{M} \underline{M}^* = \underline{U} \begin{bmatrix} \underline{\Sigma}_r^2 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{U}^* \end{aligned}$$

die Matrizen \underline{V} bzw. \underline{U} die orthogonalen Eigenvektormatrizen zu den jeweiligen hermiteschen Matrizen $\underline{M}^* \underline{M}$ bzw. $\underline{M} \underline{M}^*$. Durch Vergleich mit der bekannten Modaltransformation (vgl. RLM-Vorlesung)

$$\underline{M} = \underline{V} \underline{\Lambda}_M \underline{V}^*$$

wird deutlich, dass die Singulärwerte also die Quadratwurzeln der reellen positiven Eigenwerte von $\underline{M}^* \underline{M}$ bzw. $\underline{M} \underline{M}^*$ sind:

$$\sigma_i(\underline{M}) = \sqrt{\lambda_i(\underline{M}^* \underline{M})} = \sqrt{\lambda_i(\underline{M} \underline{M}^*)} \quad (i = 1, \dots, r).$$

The screenshot shows the MATLAB R2014a environment. The Command Window contains the following code and output:

```

>> A = [1.4015, -1.0480, -0.4009, 1.0133]
A =
    1.4015   -1.0480   -0.4009    1.0133
    -0.4009    0.5000    0.8666    0.5000
    0.5000    0.8666    0.5000    0.8666
    -0.7071    0.7071    0.7071    0.7071

>> [U, S, V] = svd(A)
U =
    -0.8666    0.5000
    0.5000    0.8666

S =
    2.0000    0
         0    0.5000

V =
    -0.7071    0.7071
    0.7071    0.7071

>> eigshow(A)

```

The `svdshow` window displays a 2D plot of the matrix A with the title "Make A^*x perpendicular to A^*y ". The plot shows two principal axes: a green ellipse representing the direction of maximum variance and a blue ellipse representing the direction of minimum variance. The axes are labeled with their corresponding singular values: $[1.40 \ -1.05; \ -0.40 \ \dots]$.

The Command History window shows the following commands:

```

clc
load('Analyze.mat')
%-- 11.05.2015 12:23 --%
demoSingulaerwertzerlegung
clc
%-- 11.05.2015 13:21 --%
clc
A = [1.4015, -1.0480, -0.4009, 1.0133]
[U, S, V] = svd(A)
eigshow(A)

```

Durch „Herauslösen“ des Reglers lassen sich beliebige Regelkreise in Form einer **verallgemeinerten Regelstrecke** darstellen, die in Bild 1 gegeben ist.

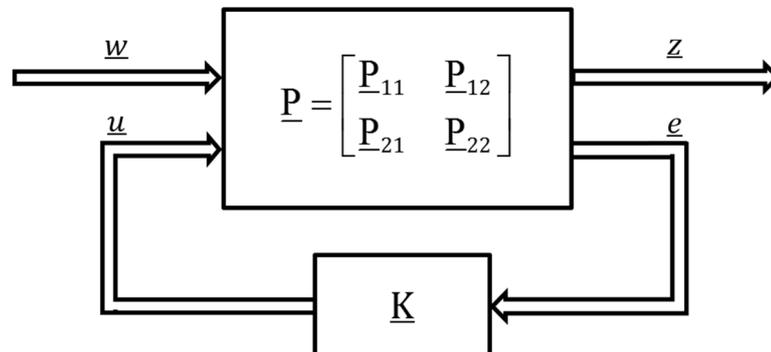


Bild 1

Es gelten also die Beziehungen:

$$\underline{z} = \underline{P}_{11}\underline{w} + \underline{P}_{12}\underline{u},$$

$$\underline{e} = \underline{P}_{21}\underline{w} + \underline{P}_{22}\underline{u}.$$

Dabei nennt man:

\underline{w} bzw. \underline{z} : externe Ein- bzw. Ausgangsgröße,

\underline{u} bzw. \underline{e} : interne Ein- bzw. Ausgangsgröße.

Für das Übertragungsverhalten lässt sich dann eine sogenannte **untere Fraktionalttransformation**

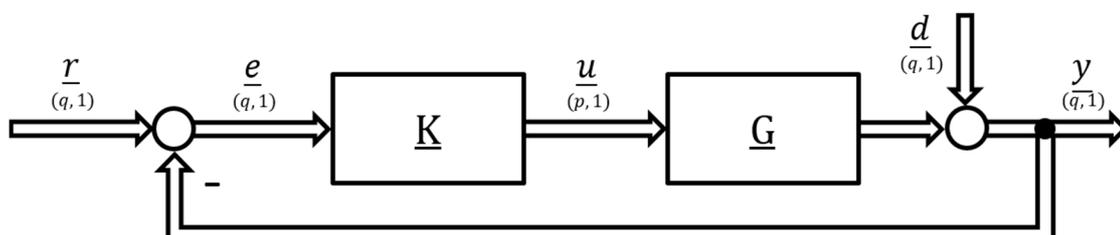
$$\underline{z} = \text{FT}_u(\underline{P}, \underline{K}) \cdot \underline{w}$$

angeben, mit

$$\text{FT}_u(\underline{P}, \underline{K}) = \underline{P}_{11} + \underline{P}_{12}\underline{K}(\underline{I} - \underline{P}_{22}\underline{K})^{-1}\underline{P}_{21}, \quad (1)$$

falls $\det(\underline{I} - \underline{P}_{22}\underline{K}) \neq 0$.

Beispiel: Standard-Regelkreis (MIMO-Fall)



Umzeichnung des Strukturbildes gemäß Bild 1 ergibt:

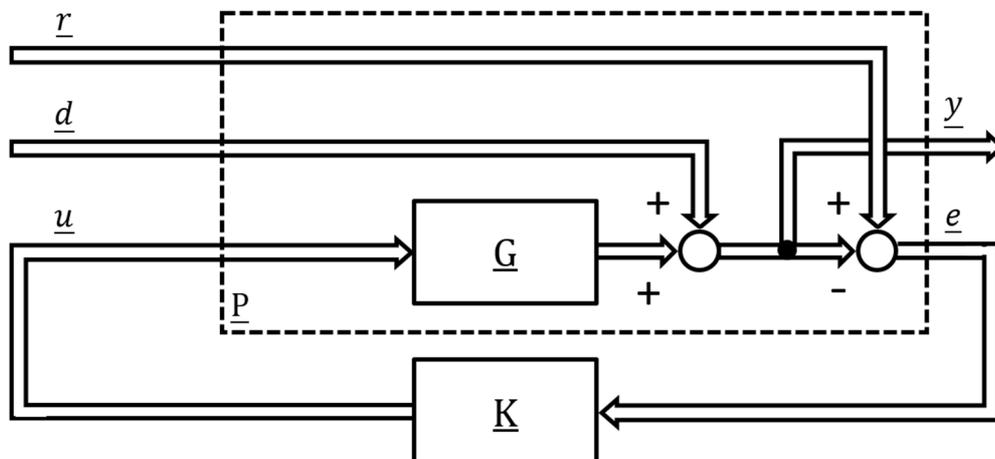


Bild 2

Am Bild 2 lässt sich die verallgemeinerte Streckenmatrix leicht ablesen. Hier ist

$$\underline{w}_{(2q,1)} = \begin{bmatrix} \underline{r} \\ \underline{d} \end{bmatrix}, \quad \underline{z}_{(q,1)} = \underline{y},$$

und damit

$$\underline{P} = \begin{matrix} q & \begin{bmatrix} \underline{P}_{11} & \underline{P}_{12} \end{bmatrix} \\ q & \begin{bmatrix} \underline{P}_{21} & \underline{P}_{22} \end{bmatrix} \\ & \begin{matrix} 2q & p \end{matrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{G} \\ \underline{I} & -\underline{I} & -\underline{G} \end{bmatrix}.$$

Also gilt mit (1)

$$\begin{aligned} \text{FT}_u(\underline{P}, \underline{K}) &= \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} + \underline{G} \underline{K} (\underline{I} + \underline{G} \underline{K})^{-1} \begin{bmatrix} \underline{I} & -\underline{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{G} \underline{K} (\underline{I} + \underline{G} \underline{K})^{-1} & \underline{I} - \underline{G} \underline{K} (\underline{I} + \underline{G} \underline{K})^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

woraus wegen

$$\underline{I} - \underline{G} \underline{K} (\underline{I} + \underline{G} \underline{K})^{-1} = \left((\underline{I} + \underline{G} \underline{K}) - \underline{G} \underline{K} \right) (\underline{I} + \underline{G} \underline{K})^{-1} = (\underline{I} + \underline{G} \underline{K})^{-1}$$

der bekannte Zusammenhang für Führungs- und Störübertragungsfunktion im Regelkreis (vergleiche z.B. RLM-Vorlesung) folgt:

$$\underline{y} = \underline{G} \underline{K} (\underline{I} + \underline{G} \underline{K})^{-1} \cdot \underline{r} + (\underline{I} + \underline{G} \underline{K})^{-1} \cdot \underline{d}.$$

Gewichtungsmatrizen gemäß Bild 3 dienen dann zur Einstellung der Performance, woraus durch Umzeichnung die FT_u-Struktur in Bild 4 deutlich wird:

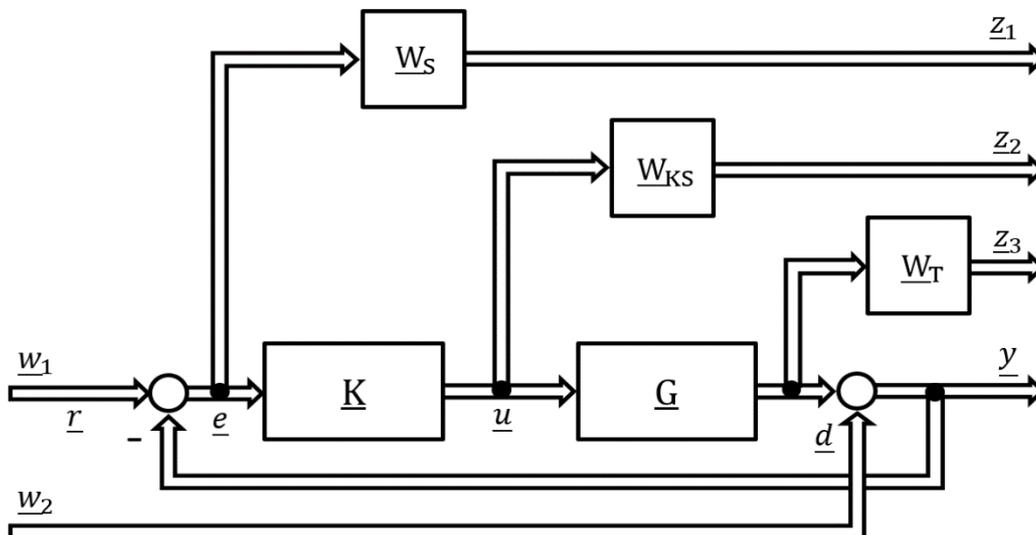


Bild 3

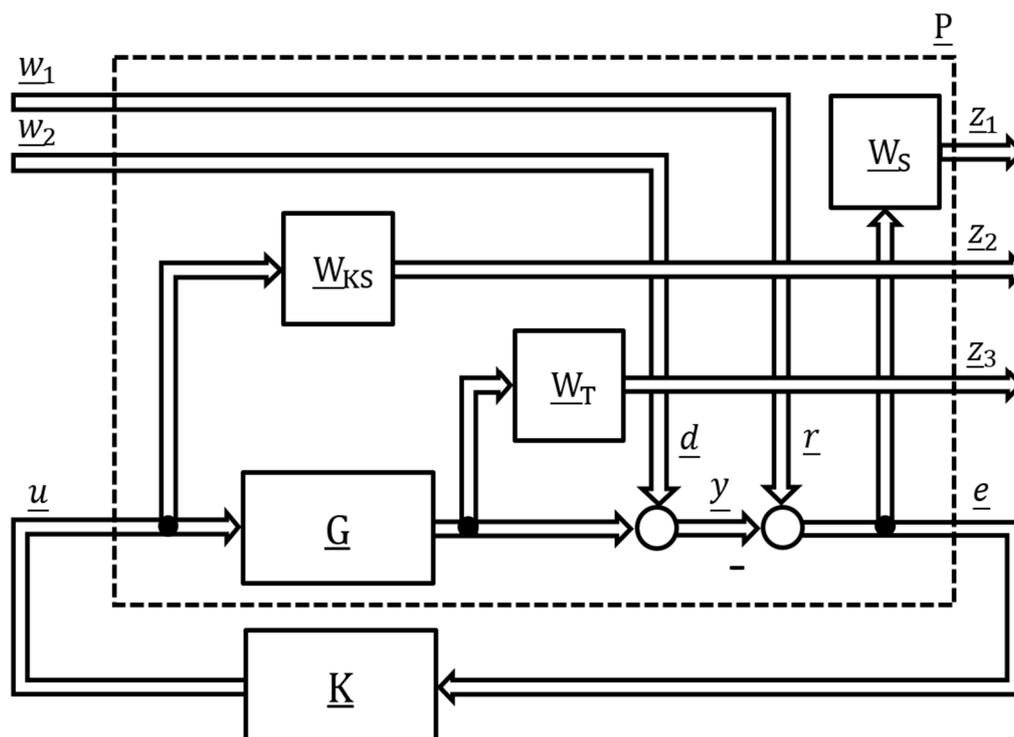
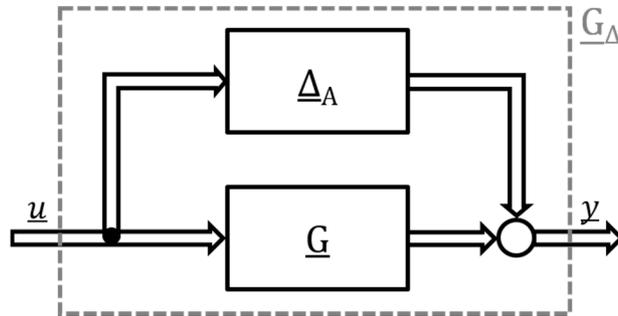


Bild 4

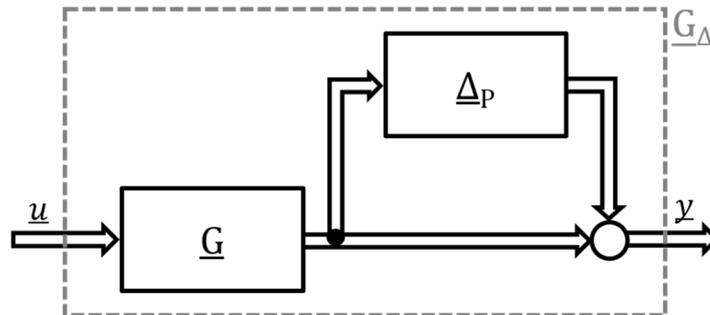
Die Strecke \underline{P} ergibt sich zu:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{W}_S & -\underline{W}_S & -\underline{W}_S \underline{G} \\ 0 & 0 & \underline{W}_{KS} \\ 0 & 0 & \underline{W}_T \underline{G} \\ \hline \underline{I} & -\underline{I} & -\underline{G} \end{bmatrix}$$

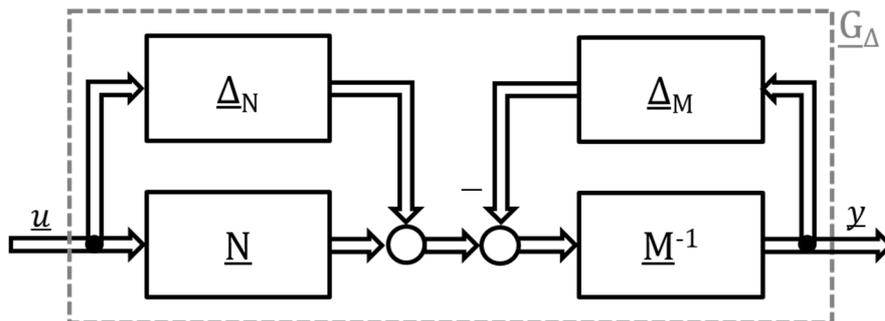
1. Additive Fehler $\underline{\Delta}_A$: $\underline{G}_\Delta = \underline{G} + \underline{\Delta}_A$



2. Multiplikative Fehler $\underline{\Delta}_P$: $\underline{G}_\Delta = (\underline{I} + \underline{\Delta}_P)\underline{G}$



3. Faktorierte Fehler $[\underline{\Delta}_N, \underline{\Delta}_M]$: $\underline{G}_\Delta = \underbrace{(\underline{M} + \underline{\Delta}_M)}_{=:\underline{M}_\Delta}^{-1} \underbrace{(\underline{N} + \underline{\Delta}_N)}_{=:\underline{N}_\Delta}$



Dabei sind $\underline{G} = \underline{M}^{-1}\underline{N}$ bzw. $\underline{G}_\Delta = \underline{M}_\Delta^{-1}\underline{N}_\Delta$ die Linkskoprimzerlegungen der Strecke und der gestörten Strecke (siehe folgende Beiblätter).

Für jede propere reell-rationale $(q \times p)$ -Übertragungsmatrix $\underline{G}(s)$ existiert eine sogenannte **Linkskopprime Zerlegung**

$$\underline{G}(s) = \underline{M}^{-1}(s)\underline{N}(s), \quad (1)$$

mit

- $\underline{M}(s)$: quadratisch $(q \times q)$, proper und stabil, $\det(\underline{M}) \neq 0$,
- $\underline{N}(s)$: $(q \times p)$, proper und stabil,

\underline{M} und \underline{N} sind **linkskopprim** zueinander, was bedeutet, dass *alle Linksteiler von \underline{M} und \underline{N} stabil und minimalphasig* sind, also keine Pole oder Nullstellen auf oder rechts der j -Achse besitzen. Dies lässt sich mit der sogenannten *Bezout-Identität* ausdrücken, bei der sich stabile Übertragungsmatrizen $\underline{P}(s)$ und $\underline{Q}(s)$ finden lassen müssen, mit denen dann gilt:

$$\underline{N}(s)\underline{P}(s) + \underline{M}(s)\underline{Q}(s) = \underline{I}.$$

Damit kann es bei der Zerlegung (1) zu keinen Kürzungen von instabilen Polen und nicht-minimalphasigen Nullstellen kommen.

Offensichtlich ist (1) *nicht eindeutig*, denn durch eine Transformation mit

$$\underline{T}(s): \text{ quadratisch } (q \times q), \text{ minimalphasig, stabil und proper, } \det \underline{T}(s) \neq 0$$

gemäß

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{M}}(s) &= \underline{T}(s) \cdot \underline{M}(s), \\ \underline{\tilde{N}}(s) &= \underline{T}(s) \cdot \underline{N}(s), \end{aligned} \quad (2)$$

ergibt sich ebenfalls wieder eine linkskopprime Zerlegung:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{M}}^{-1}(s)\underline{\tilde{N}}(s) &= (\underline{T}(s) \underline{M}(s))^{-1}(\underline{T}(s) \underline{N}(s)) \\ &= \underline{M}^{-1}(s) \underline{T}^{-1}(s) \underline{T}(s) \underline{N}(s) \\ &= \underline{M}^{-1}(s) \underline{N}(s). \end{aligned}$$

Dieser Freiheitsgrad wird z.B. für eine **normalisierte Linkskopprimzerlegung** genutzt, bei der neben (1) die Transformationsmatrix in (2) so gewählt ist, dass gilt:

$$\underline{G}(s) = \underline{\tilde{M}}^{-1}(s)\underline{\tilde{N}}(s),$$

mit

$$\underline{\tilde{M}}(s)\underline{\tilde{M}}^*(s) + \underline{\tilde{N}}(s)\underline{\tilde{N}}^*(s) = \underline{I}.$$

In gleicher Weise wie bei dem verallgemeinerten Regelkreis von Beiblatt ORS 2-6 kann man auch eine **verallgemeinerte gestörte Strecke** durch „Herauslösen“ des Störterms beschreiben, was in Bild 1 dargestellt ist.

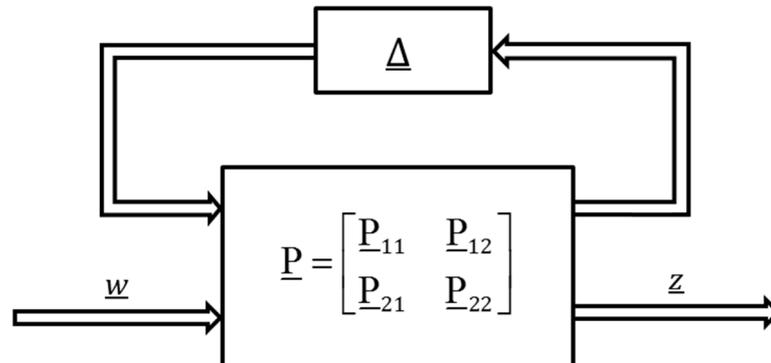


Bild 1

Für das Übertragungsverhalten lässt sich dann ganz analog eine sogenannte **obere Fraktionstransformation**

$$\underline{z} = \text{FT}_o(\underline{P}, \underline{\Delta}) \cdot \underline{w}$$

angeben, mit

$$\text{FT}_o(\underline{P}, \underline{\Delta}) = \underline{P}_{22} + \underline{P}_{21}\underline{\Delta}(\underline{I} - \underline{P}_{11}\underline{\Delta})^{-1}\underline{P}_{12}, \quad (2)$$

falls $\det(\underline{I} - \underline{P}_{11}\underline{\Delta}) \neq 0$.

Für die auf Beiblatt ORS 2-11 definierten Fehler ergeben sich dann die gestörten Strecken $\underline{G}_\Delta = \text{FT}_o(\underline{P}, \underline{\Delta})$ mit den zugehörigen Standard-Strecken der Form

$$\underline{P} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{P}_{11} & \underline{P}_{12} \\ \hline \underline{P}_{21} & \underline{P}_{22} \end{array} \right]:$$

- Additive Fehler $\underline{\Delta}_A$:

$$\underline{P} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \underline{I} \\ \hline \underline{I} & \underline{G} \end{array} \right]$$

- Multiplikative Fehler $\underline{\Delta}_P$:

$$\underline{P} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \underline{G} \\ \hline \underline{I} & \underline{G} \end{array} \right]$$

- Faktorierte Fehler $[\underline{\Delta}_N, -\underline{\Delta}_M]$:

$$\underline{P} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \underline{I} \\ \hline \underline{M}^{-1} & \underline{G} \\ \hline \underline{M}^{-1} & \underline{G} \end{array} \right]$$

Das sogenannte **Small-Gain-Theorem** (Zames, 1966) stellt eine hinreichende Aussage zur Stabilität eines gekoppelten MIMO-Systems gemäß Bild 2 dar.

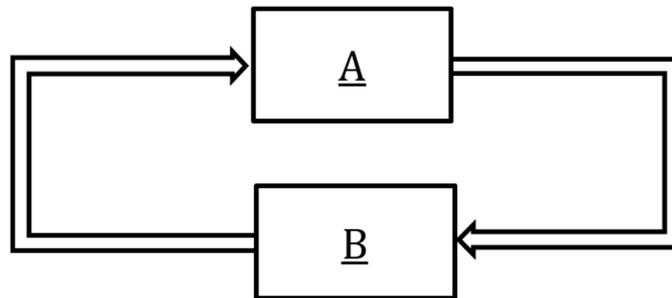


Bild 2

Es lautet:

Das System in Bild 2 mit asymptotisch stabilen Übertragungsmatrizen \underline{A} und \underline{B} ist stabil, wenn

$$\bar{\sigma}(\underline{A}(j\omega)) \cdot \bar{\sigma}(\underline{B}(j\omega)) < 1$$

für alle ω gilt.

Beim verallgemeinerten H_∞ -Problem soll eine Kombination quantitativer und qualitativer Regelkreisanforderungen minimiert werden. Im Beispiel seien konkret die folgenden beiden Anforderungen betrachtet:

- Gutes Führungsverhalten mittels der über eine Performance-Matrix \underline{W}_S gewichteten Sensitivitätsmatrix $\underline{S} = (\underline{I} - \underline{G}\underline{K})^{-1}$
- Gewährleistung der Stabilität, trotz eines additiven Fehlers $\underline{\Delta}_A$ der Strecke

Um mit dem Beispiel exemplarisch den allgemeinsten Fall abzudecken, wird der additive Fehler noch zusätzlich mit einer Gewichtungsmatrix \underline{W}_Δ versehen. Die entstehende Struktur, die im Bild 3 gezeigt ist, stellt somit eine Erweiterung der auf dem Beiblatt 2-11 definierten verallgemeinerten Regelstrecke dar.

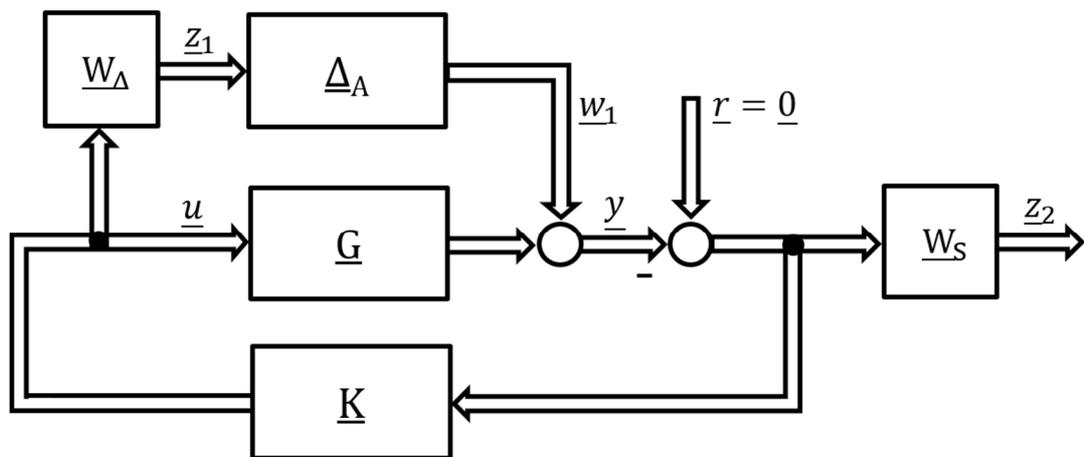


Bild 3

Um konform zu den Bezeichnungen des Beiblattes 2-6 zu bleiben, werden die Ausgänge der Gewichtungsmatrizen mit \underline{z}_1 und \underline{z}_2 , der Ausgang der Fehlermatrix mit \underline{w}_1 bezeichnet.

Durch einfache Umzeichnung von Bild 3 erhält man zur Darstellung des Gesamtverhaltens die in Bild 4 gezeigte Struktur.

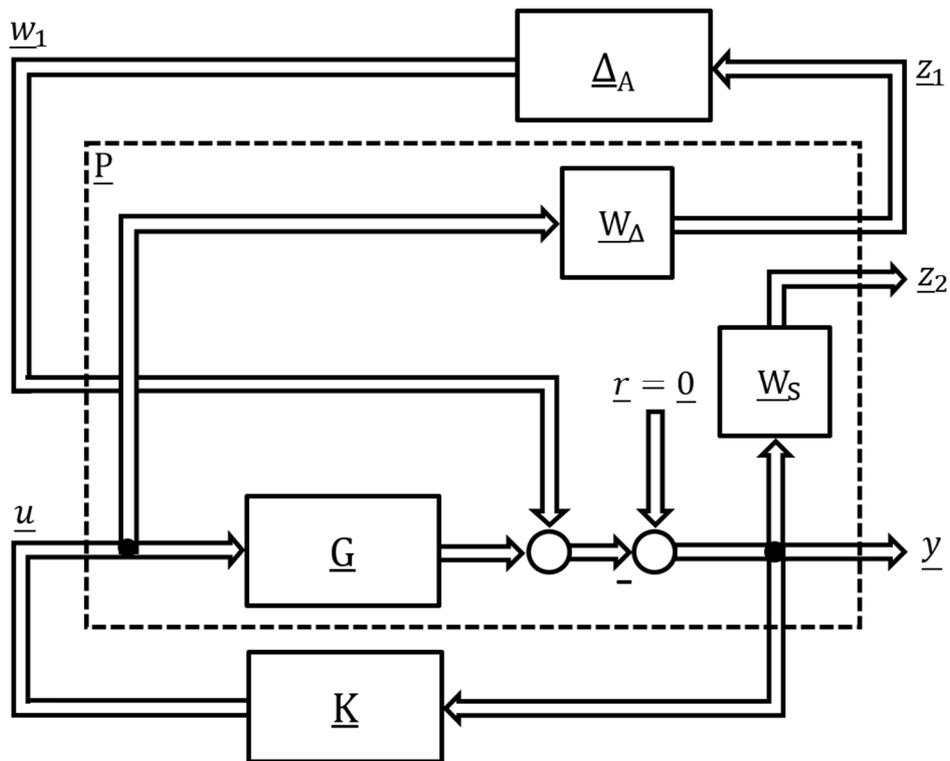


Bild 4

An Bild 4 lässt sich dann die zugehörige Standard-Strecke \underline{P} direkt ablesen:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{W}_\Delta \\ -\underline{W}_S & -\underline{W}_S \underline{G} \\ \hline -\underline{I} & -\underline{G} \end{bmatrix}$$

Gewichtete quantitative Forderungen an die Regelkreiseigenschaften, wie in Kapitel 2.2.3 der Vorlesung behandelt, lassen sich im NLKF-Entwurf ohne weiteres integrieren. Dies erfolgt durch Einführung von Gewichtungsmatrizen für die Strecke \underline{G} gemäß Bild 1.

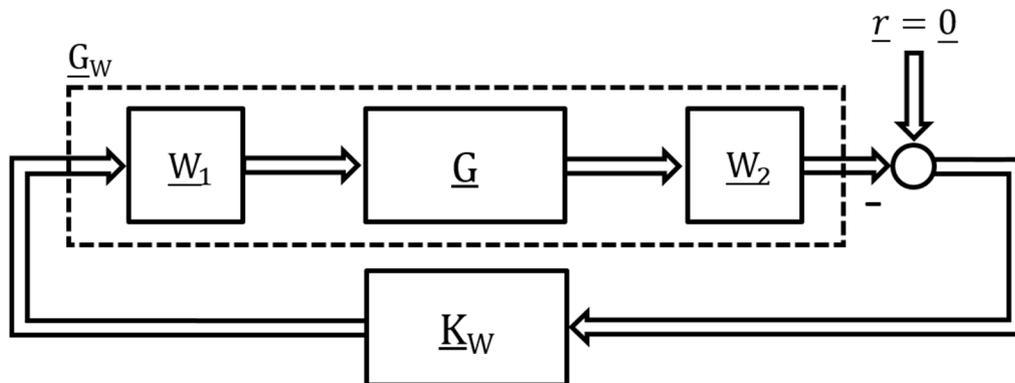


Bild 1

Das in der Vorlesung gezeigte Vorgehen führt somit zu einer gesuchten Reglermatrix \underline{K}_W , die folgende H_∞ -Norm minimieren muss:

$$\left\| \begin{bmatrix} \underline{K}_W \\ \underline{I} \end{bmatrix} (\underline{I} + \underline{G}_W \underline{K}_W)^{-1} \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{G}_W \end{bmatrix} \right\|_\infty . \quad (1)$$

Durch Verschieben der Gewichtungsmatrizen erhält man in Bild 2 die zum Verhalten des Regelkreises äquivalente Struktur zu Bild 1.

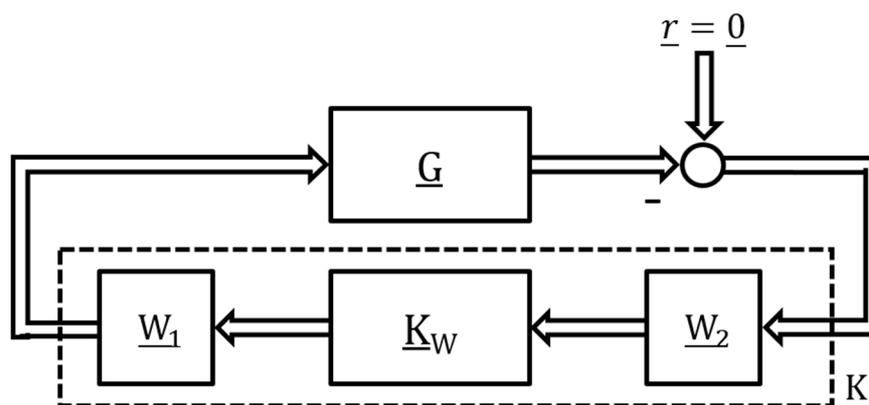


Bild 2

Bild 2 macht nun deutlich, dass sich die ursprüngliche Aufgabe offensichtlich auf den Entwurf eines frequenzgewichteten Reglers $\underline{K} = \underline{W}_1 \underline{K}_W \underline{W}_2$ für die ungewichtete Strecke \underline{G} zurückführen lässt.

Mit

$$\underline{G}_W = \underline{W}_2 \underline{G} \underline{W}_1 \quad \text{und}$$

$$\underline{K}_W = \underline{W}_1^{-1} \underline{K} \underline{W}_2^{-1}$$

ergibt sich dann für (1)

$$\left\| \begin{bmatrix} \underline{W}_1^{-1} \underline{K} \\ \underline{W}_2 \end{bmatrix} (\underline{I} + \underline{G} \underline{K})^{-1} \begin{bmatrix} \underline{W}_2^{-1} & \underline{G} \underline{W}_1 \end{bmatrix} \right\|_{\infty}. \quad (2)$$

Hieran lässt sich die Frequenzgewichtung der Sensitivitätsmatrix $\underline{S} = (\underline{I} + \underline{G} \underline{K})^{-1}$ deutlich ablesen. Für die Regler-Synthese kann man also zunächst auf Basis von (1) den Regler \underline{K}_W berechnen, während an der realen Strecke \underline{G} später der gewichtete Regler \underline{K} gemäß (2) realisiert wird.

Die im ersten Kapitel der Vorlesung betrachtete algebraische Matrix-Riccati-Gleichung ist ein Spezialfall der sogenannten **Generalisierten Algebraischen Regelungs-Riccati-Gleichung (GCARE)** (kurz für Generalized Control Algebraic Riccati Equation). Diese ergibt sich für ein lineares Zustandsraum-System der Form

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C} \underline{x} + \underline{D} \underline{u}\end{aligned}\tag{1}$$

zu

$$(\underline{A} - \underline{B} \underline{S}^{-1} \underline{D}^* \underline{C})^* \underline{X} + \underline{X} (\underline{A} - \underline{B} \underline{S}^{-1} \underline{D}^* \underline{C}) - \underline{X} \underline{B} \underline{S}^{-1} \underline{B}^* \underline{X} + \underline{C}^* \underline{R}^{-1} \underline{C} = \underline{0},\tag{2}$$

mit

$$\underline{R} = \underline{I} + \underline{D} \underline{D}^* \text{ und } \underline{S} = \underline{I} + \underline{D}^* \underline{D}.$$

Ganz analog existiert auch eine **Generalisierte Algebraische Filter-Riccati-Gleichung (GFARE)** (kurz für Generalized Filter Algebraic Riccati Equation):

$$(\underline{A} - \underline{B} \underline{D}^* \underline{R}^{-1} \underline{C}) \underline{Z} + \underline{Z} (\underline{A} - \underline{B} \underline{D}^* \underline{R}^{-1} \underline{C})^* - \underline{Z} \underline{C}^* \underline{R}^{-1} \underline{C} \underline{Z} + \underline{B} \underline{S}^{-1} \underline{B}^* = \underline{0}.\tag{3}$$

Ist das System (1) nun *steuer- und beobachtbar*, so gibt es für \underline{X} bzw. \underline{Z} eindeutige, positiv definite Lösungen $\underline{X}_{\text{pos}}$ und $\underline{Z}_{\text{pos}}$ von (2) bzw. (3), mit denen sich ein Regler \underline{F} bzw. ein Filter \underline{H} ergeben gemäß

$$\underline{F} = -\underline{S}^{-1} (\underline{D}^* \underline{C} + \underline{B}^* \underline{X}_{\text{pos}})\tag{4}$$

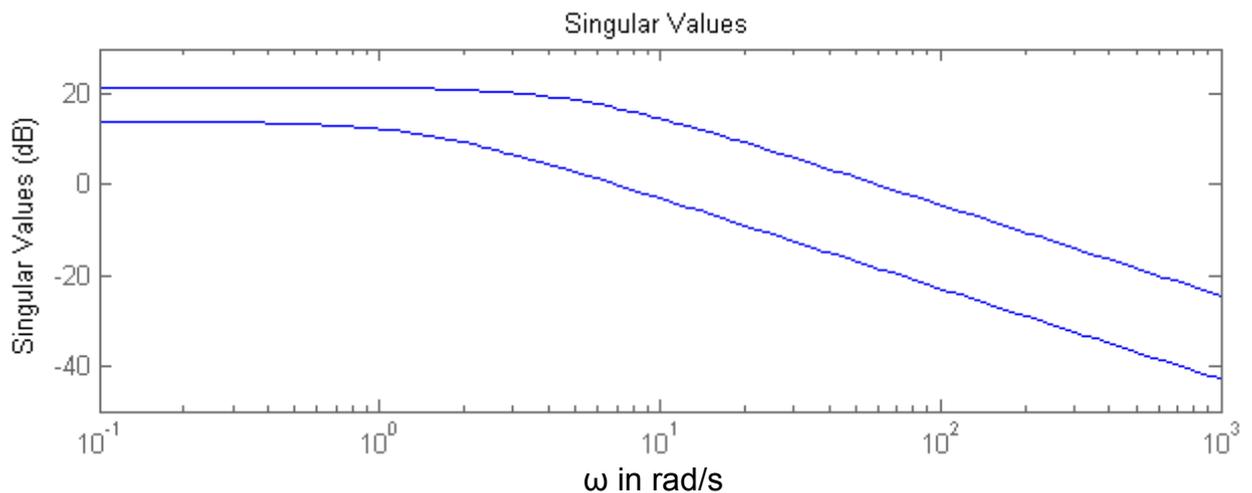
$$\text{und } \underline{H} = -(\underline{B} \underline{D}^* + \underline{Z}_{\text{pos}} \underline{C}^*) \underline{R}^{-1}.\tag{5}$$

Die so gewählten Regler- bzw. Filtermatrizen sorgen für stabile Eigenwerte von $(\underline{A} + \underline{B} \underline{F})$ bzw. $(\underline{A} + \underline{H} \underline{C})$. So sind die in Kapitel 1 der Vorlesung entworfenen Riccati-Regler somit spezielle Lösungen von (2) und (4), für die $\underline{X} \triangleq \underline{P}$ und $\underline{F} \triangleq \underline{K}$ gilt.

Betrachtet sei ein MIMO-System mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen, d.h. $p = q = 2$. Die Übertragungsmatrix sei gegeben mit

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{12}{0,2s + 1} & \frac{-0,05}{0,1s + 1} \\ \frac{0,1}{0,3s + 1} & \frac{5}{0,7s - 1} \end{bmatrix}$$

Aufgrund einer Polstelle bei $\lambda = 1.43$ der Teil-Übertragungsfunktion $G_{22}(s)$ ist das Gesamtsystem instabil. Das Singulärwertdiagramm der Strecke ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



Entsprechend der Teil-Übertragungsfunktionen besitzt die Strecke also Tiefpasscharakter.

Zur Regelung dieser Strecke soll mittels des NLKF-Verfahrens ein H_∞ -Regler entworfen werden. In MATLAB kann die Reglermatrix gemäß Gleichung (9) des Vorlesungsabschnitts 2.2.5 mit dem Befehl

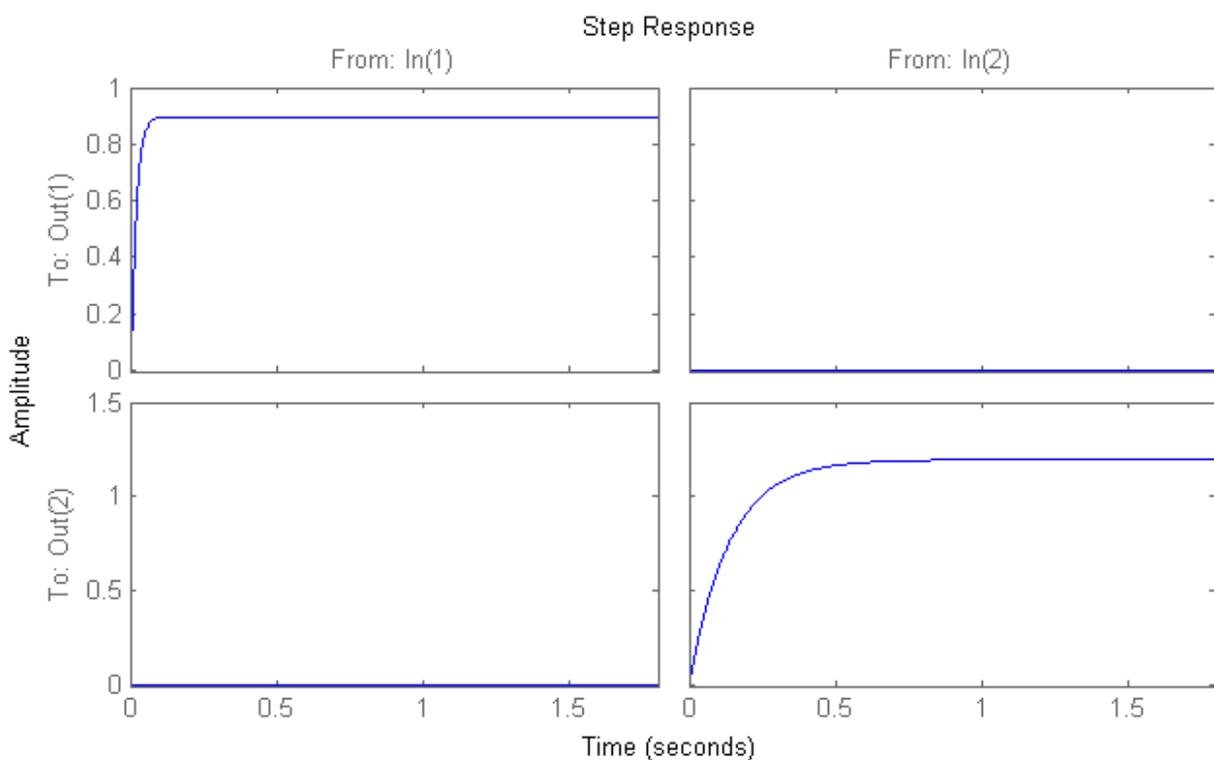
$$[K_h, \sim, \text{gam}] = \text{ncfsyn}(G)$$

berechnet werden. Hierbei bezeichnet K_h das Negative der Reglermatrix, d.h. $-K_0$. Die Variable gam entspricht der oberen Grenze γ des Gütekriteriums. Der Regler sorgt somit nur für eine suboptimale Lösung des Optimierungsproblems.

Für das vorliegende Problem ergibt sich nach dem NLKF-Entwurf ein Regler der Ordnung 3. Die folgende Abbildung zeigt die Sprungantworten der einzelnen Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises, welche sich über

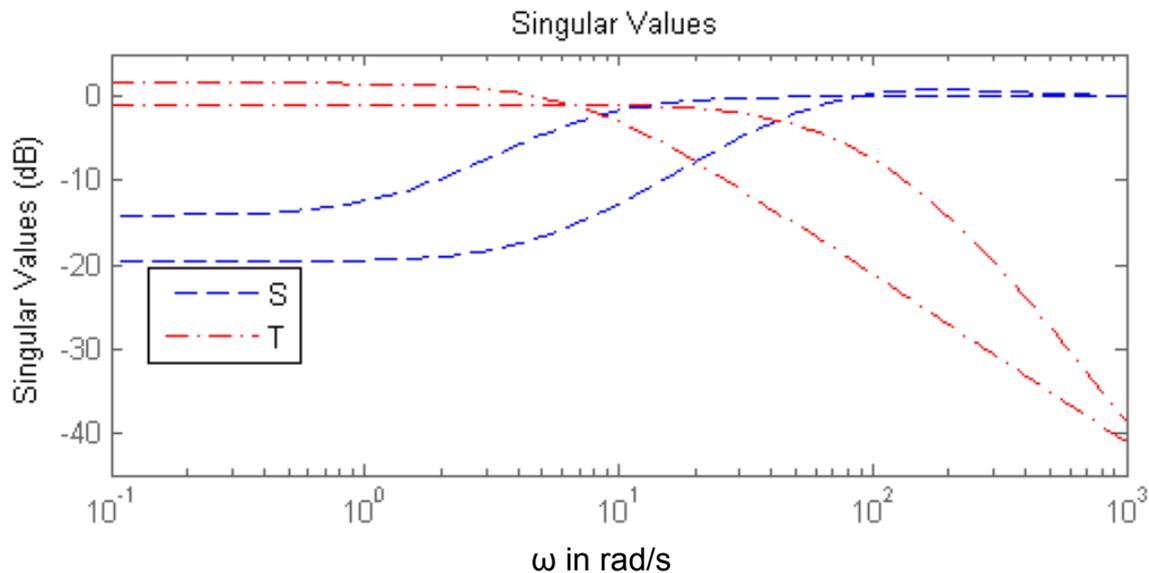
$$\underline{G}_w(s) = \left(\underline{I} + \underline{E}_o(s) \right)^{-1} \underline{E}_o(s)$$

mit $\underline{E}_o(s) = \underline{G}(s)\underline{K}_0(s)$ berechnen lassen.



Wie zu erkennen ist, vermag der Regler das System zu stabilisieren und die Signalpfade zu entkoppeln. Es wird jedoch keine stationäre Genauigkeit erzielt, da diese nicht Teil der Entwurfsforderung ist. Ist stationäre Genauigkeit erforderlich, bedient man sich dann einfacher Erweiterungen der gefundenen Regelung. Für die obere Normschranke liefert das Verfahren in diesem Beispiel den Wert $\gamma = 1.5772$.

Die nächste Abbildung zeigt abschließend noch das Singulärwertdiagramm der Sensitivität \underline{S} und der komplementären Sensitivität \underline{T} .



Wie zu erkennen ist, erfüllt die Regelung die quantitativen Regelkreisforderungen aus Abschnitt 2.2.3, nämlich

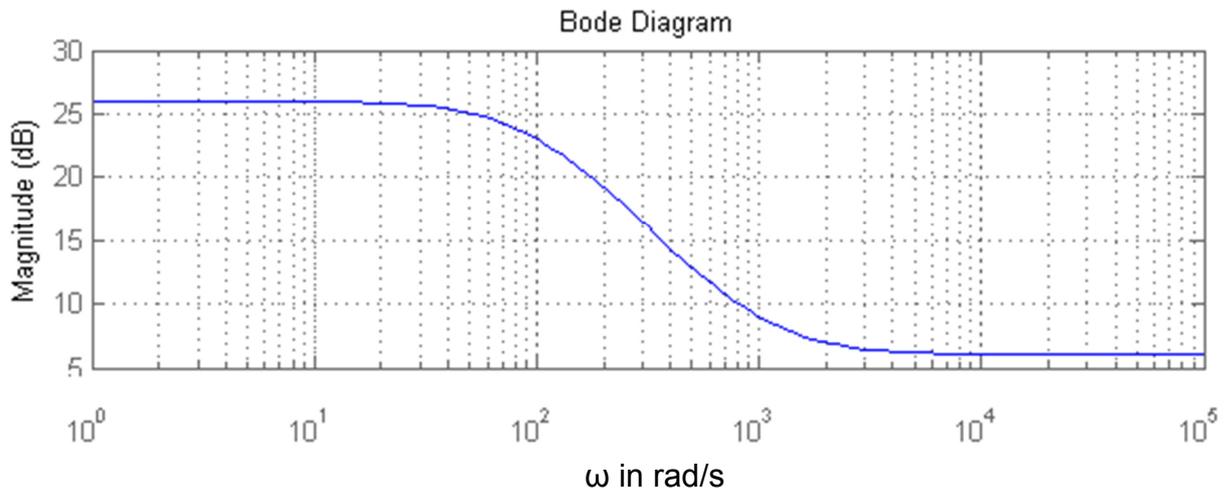
- gutes Führungsverhalten: $\bar{\sigma}(\underline{S}) \ll 1$ für $0 \leq \omega \leq \omega_r$,
- gute Rauschunterdrückung: $\bar{\sigma}(\underline{T}) \ll 1$ für $\omega_n \leq \omega \leq \infty$.

Als Grenzfrequenzen seien nun $\omega_r = 100$ rad/s und $\omega_n = 1000$ rad/s gewählt. Der Entwurf kann dann mittels einer Gewichtungsmatrix

$$W_1(s) = 20 \cdot \frac{(10^{-3}s + 1)}{(10^{-2}s + 1)}$$

entsprechend den Anforderungen angepasst werden (vgl. auch Beiblätter ORS 2-15, 2-16).

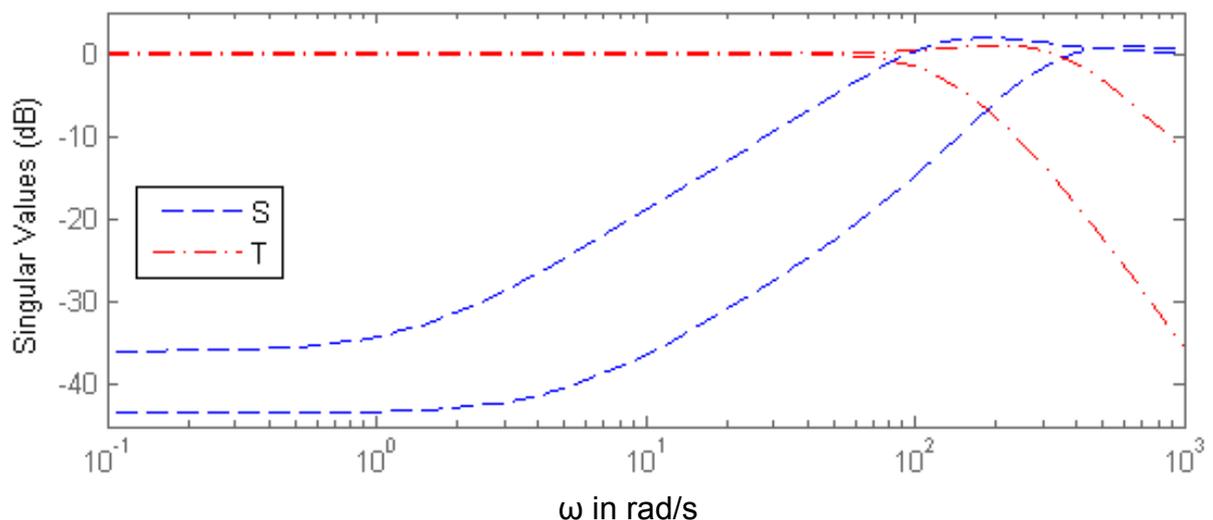
Am Amplitudengang der Filterfunktion ist zu erkennen, dass nun der Frequenzbereich bis $\omega = 100$ rad/s in der Zielfunktion besonders stark gewichtet wird.



Wird jetzt mit

$$[K_h, \sim, \text{gam}] = \text{ncfsyn}(G, W1)$$

ein neuer Regler entworfen, ergibt sich für das Singulärwertdiagramm des geschlossenen Kreises folgender Verlauf:



Dies veranschaulicht, wie anhand der Gewichtungsmatrizen die Frequenzgänge je nach Fragestellung geformt werden können (*loop-shaping*). Die Sensitivität des Regelkreises ist über weite Frequenzbereiche nahezu konstant, was mit einem robusten Regelkreisverhalten in diesen Bereichen gleichzusetzen ist.

Zum Entwurf der robusten Regelung wird eine Ausgangsrückführung $\underline{u} = -\underline{K}\underline{y}$ der messbaren Ausgangsgrößen angestrebt, die in Bild 1 wiedergegeben ist.

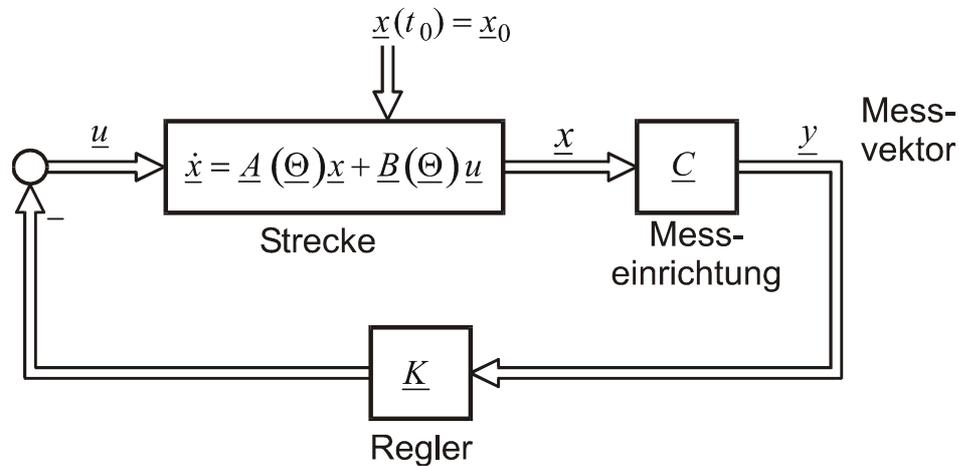


Bild 1

Die Streckenparameter variieren dabei wie in der Vorlesung beschrieben in einem Parameterraum B , der beispielhaft für $n = 2$ im Bild 2 dargestellt ist.

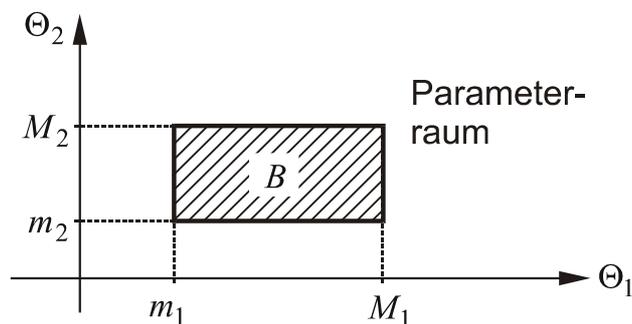


Bild 2

Die gewünschte Eigenschaft besteht in der Γ -Stabilität, was in Bild 3 exemplarisch angedeutet ist.

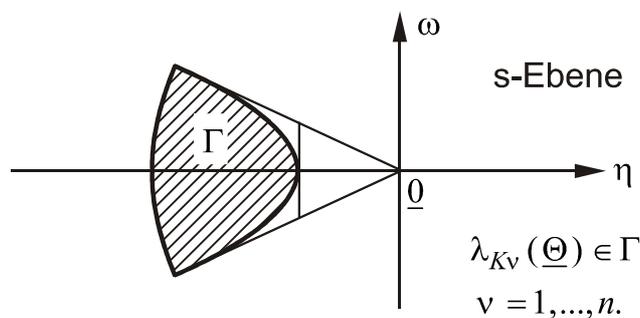


Bild 3

Für die Wahl des Polbereichs wird eine Übertragungsfunktion $G(s)$ mit konjugiert komplexem Polpaar $\alpha, \bar{\alpha}$ betrachtet:

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{(s-\alpha)(s-\bar{\alpha})} = \frac{1}{1+2\left(\frac{d}{\omega_0}\right)s+\left(\frac{1}{\omega_0^2}\right)s^2}.$$

Bild 4 zeigt die Lage der Pole und den Einfluss der Parameter von $G(s)$ in der s-Ebene.

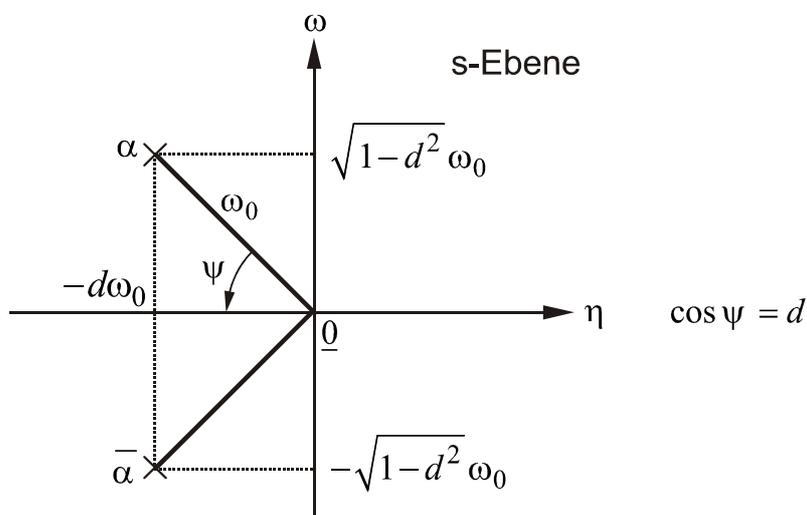


Bild 4

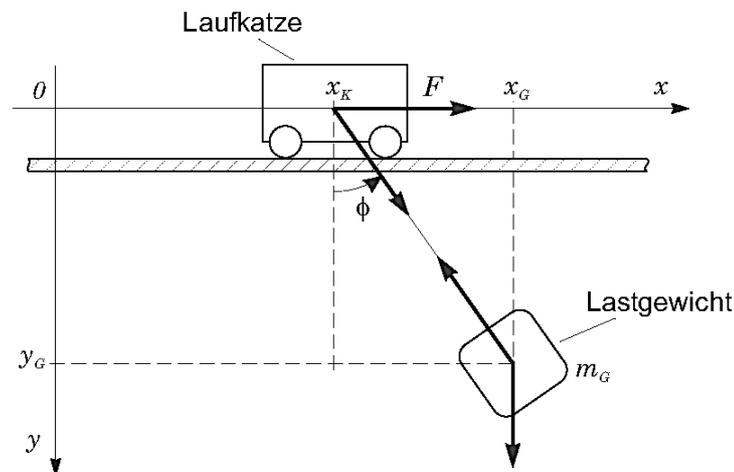
Die Sprungantwort von $G(s)$ ergibt sich dabei zu

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-d\omega_0 t} \sin(\sqrt{1-d^2}\omega_0 t + \Psi)$$

und zeigt ebenfalls, wie hierbei die Parameter d und ω_0 eingehen.

2.3.2 Beispiel zur robusten Polbereichsvorgabe (1) ORS 2-24

Betrachtet wird das Beispiel einer Verladebrücke wie auf Beiblatt ORS 1-5.



Die Zustandsgrößen werden erneut gewählt zu

$$x_1 = x_K; \quad x_2 = \dot{x}_K = v_K; \quad x_3 = \Phi; \quad x_4 = \dot{\Phi} = \omega.$$

Die Eingangs- und Ausgangsgrößen sind gegeben mit $u = F$ bzw. $y_1 = x_1 = x_K$ sowie $y_2 = x_2 = v_K$. Für die Werte bzw. Bereiche für die Parameter werden angenommen:

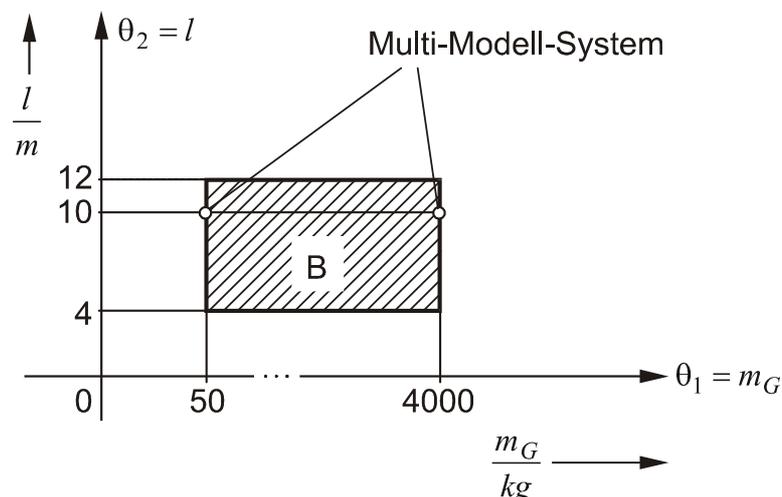
$$m_K = 1000 \text{ kg}$$

$$m_G = 50 \dots 4000 \text{ kg}$$

$$l = 4 \dots 12 \text{ m}$$

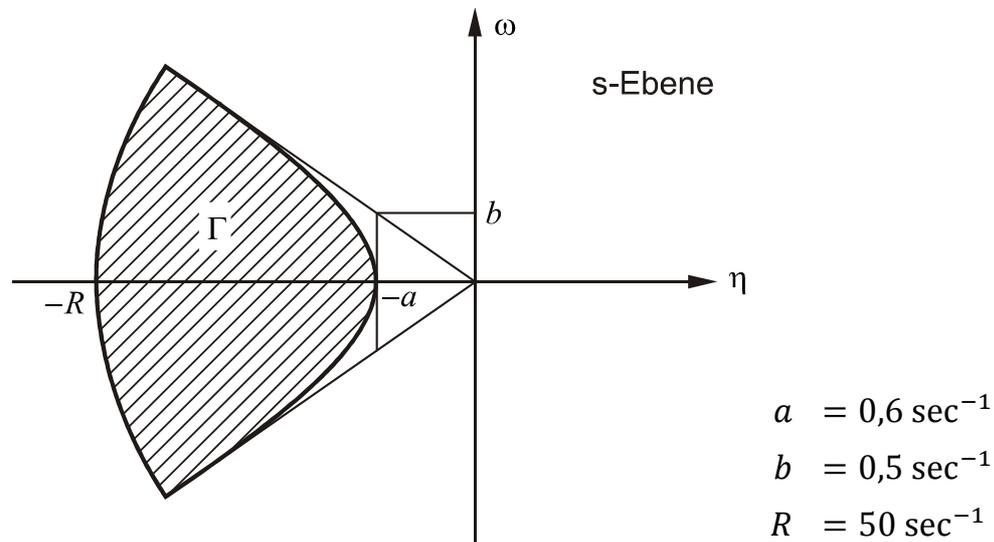
$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Hieraus resultiert der entsprechende Parameterbereich B, aus dem die zwei abgebildeten Parameterkombinationen für die Multi-Modell-Synthese gemäß der Vorlesung ausgewählt wurden:



2.3.2 Beispiel zur robusten Polbereichsvorgabe (2) ORS 2-25

Wie in Abschnitt 2.3.1 der Vorlesung wird der Polbereich Γ gemäß folgender Abbildung gewählt:



Um ein befriedigendes dynamisches Verhalten über den sehr großen Parameterbereich B zu garantieren, wird als zusätzliche Messgröße der Greiferwinkel benötigt, d.h.

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Da somit $p \cdot q = 3$ gilt, ist der Einsatz eines sogenannten dynamischen Reglers erforderlich, um eine ausreichende Anzahl freier Reglerparameter für die Strecke der Ordnung 4 zu erhalten (vgl. Vorlesung RLM). Die Gleichungen des dynamischen Reglers lauten:

$$\dot{\underline{x}}_D = \underline{A}_D \underline{x}_D + \underline{B}_D \underline{y}$$

$$\underline{u} = -\underline{C}_D \underline{x}_D - \underline{D}_D \underline{y}.$$

Die Ordnung des Reglers ergibt sich zu r , d.h. \underline{x}_D ist ein r -dimensionaler Zustandsvektor.

2.3.2 Beispiel zur robusten Polbereichsvorgabe (3) ORS 2-26

Aus der Syntheseforderung, dass die Anzahl $r^2 + qr + pr + pq$ der in den Matrizen \underline{A}_D , \underline{B}_D , \underline{C}_D und \underline{D}_D vorliegenden Entwurfparameter größer als die um den dynamischen Regler erhöhten Streckenordnung $n + r$ ist, ergibt sich für den konkreten Fall:

$$r^2 + 3r + r + 3 \geq 4 + r.$$

Diese Ungleichung ist bereits für $r = 1$ erfüllt. Daher wird ein dynamischer Regler 1. Ordnung eingesetzt, welcher der dynamischen Ausgangsrückführung also 8 freie Parameter verleiht:

$$\begin{aligned} u &= [k_{11}, k_{12}, k_{13}] (\underline{w} - \underline{y}) - k_3 x_D, \\ \dot{x}_D &= [k_{21}, k_{22}, k_{23}] (\underline{w} - \underline{y}) - k_4 x_D. \end{aligned}$$

Die Führungsgröße wird so vorgegeben, dass die Laufkatze eine gewünschte Position w_e einnimmt, d.h.

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} w_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Durch die Einführung des neuen Zustandsvektors

$$\underline{x}_g = \begin{bmatrix} x \\ x_D \end{bmatrix}$$

lässt sich die Synthese auf den Entwurf einer konstanten Ausgangsrückführung für das System

$$\dot{\underline{x}}_g = (\underline{A}_g - \underline{B}_g \underline{K}_g \underline{C}_g) \underline{x}_g + \underline{B}_g \underline{K}_g \underline{w}_g$$

mit entsprechenden Matrizen

$$\underline{A}_g, \underline{B}_g, \underline{C}_g, \underline{w}_g = \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ sowie } \underline{K}_g = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_3 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_4 \end{bmatrix}$$

zurückführen (vgl. Vorlesung RLM).

2.3.2 Beispiel zur robusten Polbereichsvorgabe (4) ORS 2-27

Als initiale Regler-Matrix wird in diesem Beispiel

$$\underline{K}_0 = \begin{bmatrix} 100 & 10.000 & -10.000 & 1 \\ 100 & 100 & 100 & 1 \end{bmatrix}$$

gewählt. Die Wahl ist dabei am Betrag der rückgeführten Größen orientiert. Der negative Eintrag soll dabei starke Rückschwingungen des Greiferwinkels verhindern.

Nach der Minimierung gemäß Abschnitt 2.3.2 der Vorlesung lautet der endgültige Ausgangsregler

$$\underline{K}_g = \begin{bmatrix} 144,7 & 10294,8 & -10032,5 & -1000,7 \\ 7,2 & 25,4 & -306,2 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Die Bilder 1, 2 und 3 zeigen die Verläufe der Katzposition x_1 , des Greiferwinkels x_3 und der Stellgröße u für verschiedene Parameterkombinationen unter Verwendung von $\underline{x}_0 = \underline{0}$ und $w_e = 10$. Aus den Abbildungen wird deutlich, wie die robuste Regelung trotz stark unterschiedlicher Parameter ein sinnvolles Betriebsverhalten gewährleistet.

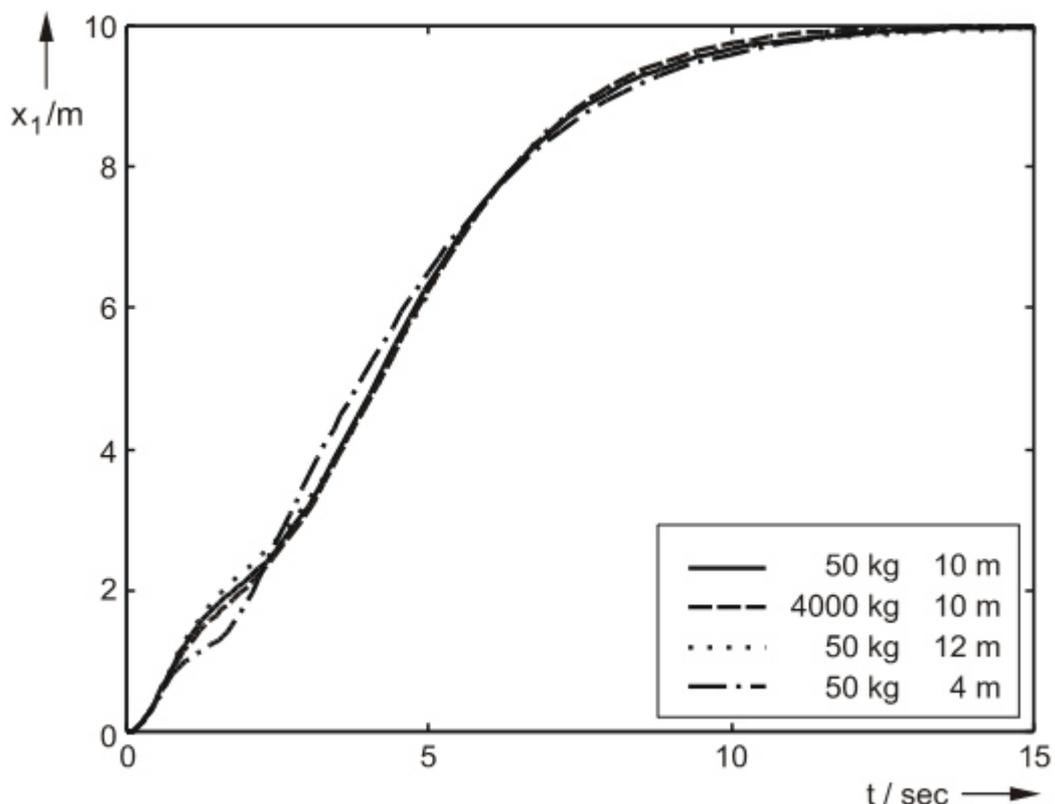


Bild 1

2.3.2 Beispiel zur robusten Polbereichsvorgabe (5) ORS 2-28

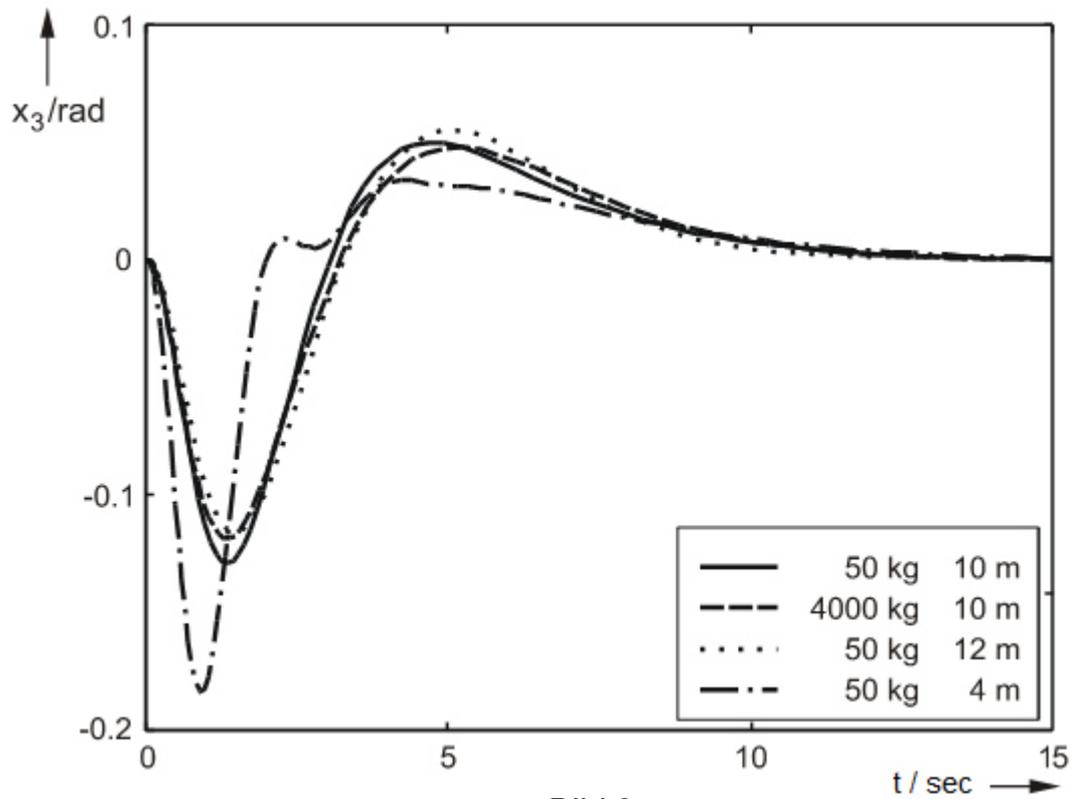


Bild 2

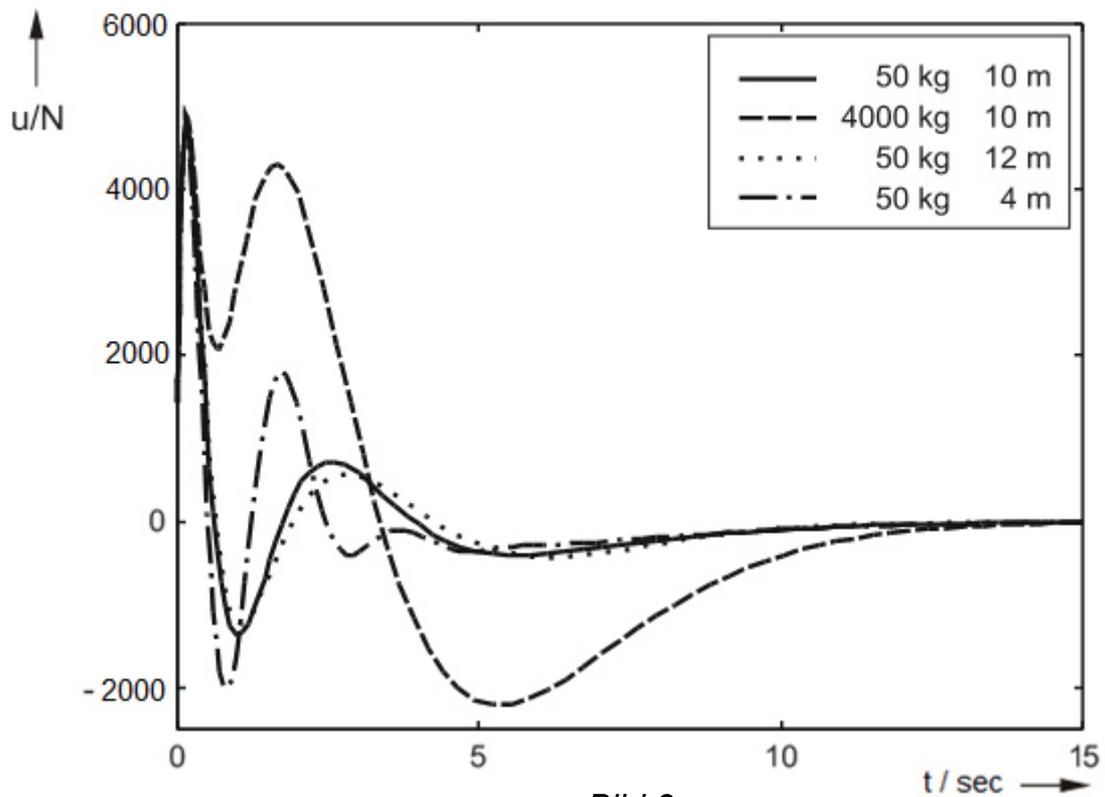


Bild 3